BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ
№1 Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası 2007

О ДИАГНОСТИЧЕСКОЙ МАТРИЦЕ МИНИМАЛЬНОЙ БИЛИНЕЙНОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТНОЙ МАШИНЫ

Г.Г.МАМЕДОВА
Институт прикладной математики БГУ

В статье даются определение и построение минимальной билинейной последовательностной машины (БПМ), устанавливается связь между диагностической матрицей минимальной БПМ и диагностической матрицей БПМ.

В отличие от детально разработанной теории линейных последовательностных машин (ЛПМ) над конечными полями [1,2], вопросы теории билинейных последовательностных машин (БПМ) представляют собой интенсивно развивающийся раздел теории автоматов [3,4].

Пусть билинейная последовательностная машина (БПМ) A над полем $GP(p)$ описывается следующей системой уравнений состояния и выхода:

$$s(t+1) = As(t) \oplus Bu(t) \oplus \sum_{k=1}^{\ell} G_k u_k s(t), \tag{1}$$

$$y(t) = Cs(t), \tag{2}$$

здесь сложение $\oplus$ понимается как покомпонентное сложение по модулю p, $s(t)$ – вектор состояний, $u(t)$ - вектор входа , $y(t)$ - вектор выхода, A, B, C, G_k $(k = \overline{1,\ell})$ – характеристические матрицы .

Обозначим $\sum_{k=1}^{\ell} G_k u_k$ через $[G,u]$.В дальнейшем для упрощения записей опускаем кружок в знаке $\oplus$.

БПМ, не имеющая эквивалентных состояний, называется минимальной. Построение минимальной БПМ $\hat{A}$ осуществляется следующим образом.

Пусть ранг диагностической матрицы K БПМ A равен r $(r \le n)$. Составим из первых r линейно независимых строк K (r,n) – матрицу T и через R обозначим правую обратную к T (n,r) – матрицу. Построим r – мерную минимальную БПМ $\hat{A}$ с помощью характеристических матриц :

$$\hat{A} = TAR,\ \hat{B} = TB,\ \hat{C} = CR,\ \hat{G}_k = TG_kR,\ k = \overline{1,\ell}\ .$$

Определим диагностическую матрицу минимальной БПМ.

Предварительно докажем некоторые факты.

Теорема 1. Состояние s БПМ A эквивалентно состоянию $\hat{s} = Ts$ БПМ $\hat{A}$.

Доказательство. Определим состояние $\hat{s}$ равенством:

$$\hat{s} = (I - RT)s .$$

Так как $TR = I$, то

$$T\widetilde{s} = (T - TRT)s = (T - T)s = 0 .$$

Поэтому состояние $\widetilde{s}$ принадлежит нуль – пространству матрицы T, а следовательно, нуль – пространству матрицы K. Состояние $A\widetilde{s}$ также принадлежит нуль – пространству матрицы K и

$$TA\widetilde{s} = 0 .$$

Таким образом,

$$Cs = C(\widetilde{s} \oplus RTs) = C\widetilde{s} \oplus CRTs = 0 + (CR)(Ts) = \hat{C}\hat{s} . \quad (3)$$

Докажем, что

$$T[\{A + [G,u]\}s + Bu] = \{\hat{A} + [\hat{G},u]\}\hat{s} + \hat{B}u . \quad (4)$$

Имеем

$$\begin{aligned}
&T[\{A + [G,u]\}s + Bu] = T[\{A + [G,u]\}(\hat{s} + RTs) + Bu] = \\
&= T[A\widetilde{s} + [G,u]\}\widetilde{s} + ARTs + [G,u]RTs + Bu] = \\
&= TA\widetilde{s} + T[G,u]\}\widetilde{s} + (TAR)(Ts) + T[G,u]R(Ts) + (TB)u] = \\
&= TA\widetilde{s} + T[G,u]\}\widetilde{s} + \hat{A}\hat{s} + T\sum_{k=1}^{\ell} G_k u_k R\hat{s} + \hat{B}u = \\
&= T[A + [G,u]]\widetilde{s} + \hat{A}\hat{s} + \sum_{k=1}^{\ell} (TG_k R)u_k \hat{s} + \hat{B}u = \\
&= T[A + [G,u]]\widetilde{s} + \hat{A}\hat{s} + [\hat{G},u]\hat{s} + \hat{B}u. \qquad (5)
\end{aligned}$$

Так как состояние $\widetilde{s}$ принадлежит нуль – пространству матрицы T, а следовательно и K, т.е. $K\widetilde{s} = 0$, то $\{A + [G_1 u]\}\widetilde{s} = 0$. Следовательно, первое слогаемое в (5) равно 0. И в правой части (5) остаются только члены $\{\hat{A} + [G_1 u]\}\hat{s}$ и $\hat{B}u$, что и доказывает (4). Из (3), (4) следует, что при воздействии произвольного сигнала u на БПМ A, находящуюся в состоянии s, и на БПМ $\hat{A}$, находящуюся в состоянии Ts, реакции обеих БПМ одинаковы и машины перейдут в состояния s' и Ts', соответственно. Тогда, по индукции, заключаем, что A и $\hat{A}$, находясь в начальном состоянии s и Ts, выдают одинаковые выходные последовательности под воздействием одной и той же входной последовательности. Отсюда следует справедливость теоремы.

Докажем ряд вспомогательных лемм.

Лемма 1. Пусть $\hat{s} = Ts$. Тогда

$$TAs = \hat{A}\hat{s} . \quad (6)$$

Доказательство.

В равенстве (4), которое верно для любого вектора u, положим $u = 0$. Тогда получим (6). В качестве следствия отметим, что при $\hat{s} = Ts$ из (6) вытекает

$$TAs = \hat{A}Ts\,,$$

или, в силу произвольности s,

$$TA = \hat{A}T\,.$$

Лемма 2. Пусть $\hat{s} = Ts$. Тогда для любого $k = \overline{1,\ell}$

$$TG_k s = \hat{G}_k \hat{s}\,. \tag{7}$$

Доказательство. Имеем:

$$TAs + T[G,u]s + TBu = \hat{A}\hat{s} + [\hat{G},u]\hat{s} + \hat{B}u\,.$$

В самом деле из леммы 1 следует , что $TAs = \hat{A}\hat{s}$. Так как $TB = \hat{B}$, то получаем

$$T[G,u]s = [\hat{G},u]\hat{s}\,. \tag{8}$$

Отметим, что (8) верно для любого вектора u. Положим $u = (0,0,...,1,0,...,0)$, где 1 стоит на k-том месте. Тогда $[G,u] = \sum_{j=1}^{\ell} G_j u_j = G_k$.

С учетом этого, (8) запишется в виде

$$TG_k s = \hat{G}_k \hat{s}\,.$$

Лемма доказана.

В качестве следствия отметим , что при $\hat{s} = Ts$ из (7) вытекает

$$TG_k s = \hat{G}_k Ts$$

или, в силу произвольности s,

$$TG_k = \hat{G}_k T\,.$$

Лемма 3. Для любого натурального числа α_o выполняется равенство

$$(TAR)^{\alpha_o} = TA^{\alpha_o} R\,. \tag{9}$$

Доказательство. Докажем (9) методом индукции . При $\alpha_o = 1$ (9) очевидно. Пусть (9) верно при $\alpha_o = \alpha - 1$. Покажем, что оно верно при $\alpha_o = \alpha$.

Имеем

$$(TAR)^{\alpha} = (TAR)(TAR)^{\alpha-1} = (TAR)TA^{\alpha-1}R = \hat{A}TA^{\alpha-1}R = TAA^{\alpha-1}R = TA^{\alpha}R\,.$$

Лемма 4. Для любого натурального числа μ выполняется равенство

$$(TG_k R)^{\mu} = TG_k^{\mu} R\,. \tag{10}$$

Доказательство. Докажем (10) методом индукции. При $\mu = 1$ (10) очевидно. Пусть (10) верно при $\mu = \alpha - 1$ Покажем, что оно верно при $\mu = \alpha$.

Имеем

$$(TG_k R)^{\alpha} = (TG_k R)(TG_k R)^{\alpha-1} = \hat{G}_k TG_k^{\alpha-1} R = TG_k G_k^{\alpha-1} R = TG_k^{\alpha} R\,.$$

Лемма 5. Для любого натурального числа α_o выполняется равенство

$$\hat{A}^{\alpha_o} T = TA^{\alpha_o}\,. \tag{11}$$

Доказательство. Докажем (11) методом индукции. При $\alpha_o = 1$ (11) представляет собой результат следствия из леммы 1. Пусть (11) верно при

$\alpha_o = \alpha - 1$. Докажем, что оно верно при $\alpha_o = \alpha$.

Имеем

$$\hat{A}^{\alpha}T = \hat{A}\hat{A}^{\alpha-1}T = \hat{A}TA^{\alpha-1} = TAA^{\alpha-1} = TA^{\alpha_o}.$$

Лемма 6. Для любого натурального числа μ выполняется равенство

$$\hat{G}_k^{\mu}T = TG_k^{\mu}.$$

Это лемма доказывается вполне аналогично предыдущей.

Теорема 2. Для любого мультииндекса $(\alpha_o, \alpha_1, ..., \alpha_\ell)$ выполняется равенство

$$\hat{A}^{\alpha_o}\hat{G}_1^{\alpha_1}\hat{G}_2^{\alpha_2}...\hat{G}_\ell^{\alpha_\ell} = TA^{\alpha_o}G_1^{\alpha_1}G_2^{\alpha_2}...G_\ell^{\alpha_\ell}R. \tag{12}$$

Доказательство. Так как $TR = I$, то, умножив левую часть (12) справа на I и применив последовательно леммы 5 и 6 , получим :

$$\begin{aligned}&\hat{A}^{\alpha_o}\hat{G}_1^{\alpha_1}\hat{G}_2^{\alpha_2}...\hat{G}_\ell^{\alpha_\ell}TR = \hat{A}^{\alpha_o}\hat{G}_1^{\alpha_1}\hat{G}_2^{\alpha_2}...G_{\ell-1}^{\alpha_{\ell-1}}T\hat{G}_\ell^{\alpha_\ell}R = \\ &= \hat{A}^{\alpha_o}\hat{G}_1^{\alpha_1}\hat{G}_2^{\alpha_2}...\hat{G}_{\ell-2}^{\alpha_{\ell-2}}TG_{\ell-1}^{\alpha_\ell-1}G_\ell^{\alpha_\ell}R = \\ &= \hat{A}^{\alpha_o}TG_1^{\alpha_1}...G_\ell^{\alpha_\ell}R = TA^{\alpha_o}G_1^{\alpha_1}...G_\ell^{\alpha_\ell}R,\end{aligned}$$

что и доказывает теорему.

Приведем основную теорему работы.

Теорема 3. Диагностическая матрица $\hat{K}$ минимальной БПМ $\hat{A}$ задается соотношением

$$\hat{K} = KR.$$

Доказательство. Из доказанного выше имеем:

$$\hat{C}\hat{A}^{\alpha_o}\hat{G}_1^{\alpha_1}...\hat{G}_\ell^{\alpha_\ell} = \hat{C}TA^{\alpha_o}G_1^{\alpha_1}...G_\ell^{\alpha_\ell}R. \tag{13}$$

Далее, из эквивалентности состояний s БПМ A и $\hat{s} = Ts$ БПМ $\hat{A}$ следует, что выходы этих машин равны , т.е. $Cs = \hat{C}\hat{s}$. Так как $\hat{s} = Ts$, то $Cs = \hat{C}Ts$ или $C = \hat{C}T$. Учитывая это равенство в (13) заключаем:

$$\hat{C}\hat{A}^{\alpha_o}\hat{G}_1^{\alpha_1}...\hat{G}_\ell^{\alpha_\ell} = CA^{\alpha_o}G_1^{\alpha_1}...G_\ell^{\alpha_\ell}R. \tag{14}$$

Левая часть (14) представляет собой блок матрицы $\hat{K}$, а правая – блок матрицы KR . Отсюда следует справедливость теоремы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гилл А. Линейные последовательностные машины. М., Наука, 1974.
2. Фараджев Р.Г. Линейные последовательностные машины. «Сов. радио», 1985.
3. Мамедова Г.Г. О некоторых свойствах билинейных последовательностных машин. Тезисы XI Международной конференции по математике и механике, посвященной 50-летию со дня рождения чл. –корр. НАНА, проф. Мамедова И.Т., 11-13 мая 2005г., Баку.
4. Mamedova G.G. “On similarity of bilinear sequence machines”. Proceedings of IMM Mat.Asad.Sci.Azerb.,2005, v.XXIII (XXXI), pp. 85-90.

MİNİMAL BİXƏTTİ ARDICIL MAŞINLARIN DİAQNOSTİK MATRİSLƏRİ HAQQINDA

Q.H.MƏMMƏDOVA

XÜLASƏ

Məqalədə minimal bixətti ardıcıl maşınların tərifi və qurulması verilir, onların diaqnostiк matrislərinin bixətti ardıcıl maşınların diaqnostiк matrisləri ilə əlaqəsi işlənmişdir.

ABOUT THE DIAGNOSTIC MATRICE OF THE MINIMAL SEQUENCE BILINEAR MACHINES

G.G.MAMEDOVA

SUMMARY

In the paper a definition and construction of the minimal bilinear sequence machines are given. The correlation between their diagnostic matrices and diagnostic matrices of the bilinear sequence machines is given.